



Lettre n° 24

19 janvier 2021

Une variante SIR déterministe ; l'effet des fêtes est passé.

Bonjour, ou bonsoir, si vous êtes à l'autre bout du monde.

La lecture de « La Jaune et la Rouge » (organe de liaison de nos amis polytechniciens) nous a fourni une piste nouvelle, que vous trouverez exposée sur notre blog sous le titre « covid-19 l'erreur de 1927 ». Cette nouvelle piste permettra de montrer que l'amélioration récente de la courbe des décès n'est pas nécessairement à classer dans la catégorie « fluctuations », mais peut s'interpréter comme le signe que **l'effet des fêtes est passé.**

Dans cette approche nouvelle, chaque patient infecté meurt ou guérit, selon le taux de létalité, au bout d'un temps d'évolution de la maladie, D , fixé. Cette composante déterministe dans la dynamique de l'épidémie nous conduit à appeler ce modèle : **S.I.R. déterministe (en réalité semi-déterministe), par opposition au modèle « historique » qui est entièrement probabiliste.**

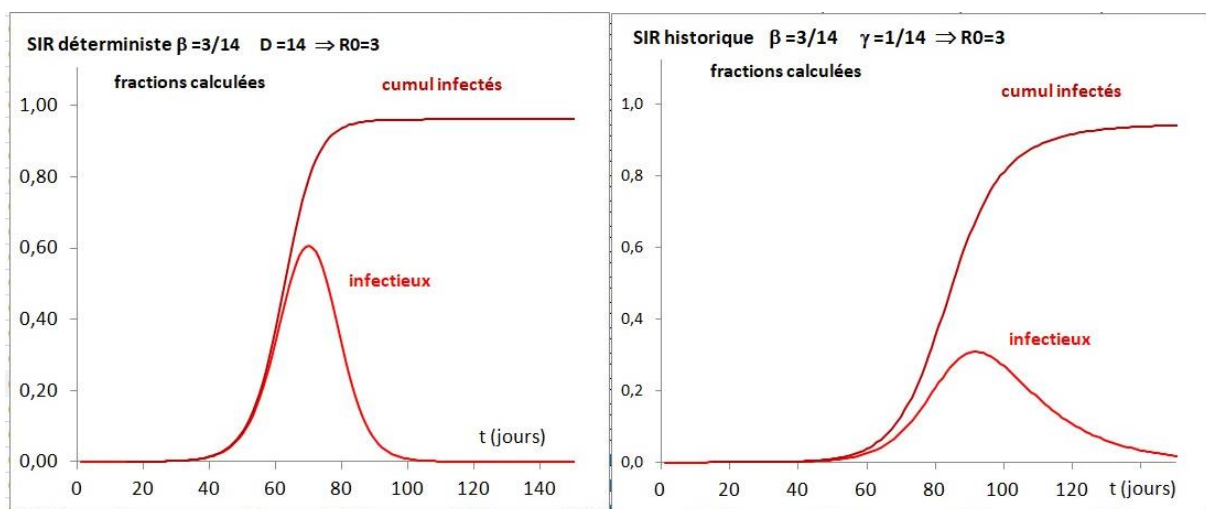
Le délai D pourrait, comme le taux de létalité, dépendre de l'âge. Dans une première approche, moyenne, nous allons prendre D égal au temps moyen de guérison du modèle probabiliste SIR, soit 14 jours. Cette méthode évite, en cas de progression rapide de la pandémie, que la vague de personnes guéries (ou décédées) ne suive de trop près la vague des personnes infectées. (*C'est pour cette raison que nous avons introduit récemment la catégorie supplémentaire « Avancés »*).

La programmation au tableur Excel reste très simple : il suffit de définir séparément les flux journaliers d'entrée et de sortie dans le « compartiment Infectieux » associé à la fraction $I(t)$:

$$\delta I_{in}(t) = \beta I(t) S(t) \text{ comme précédemment ; } \delta I_{out}(t) = \delta I_{in}(t-14).$$

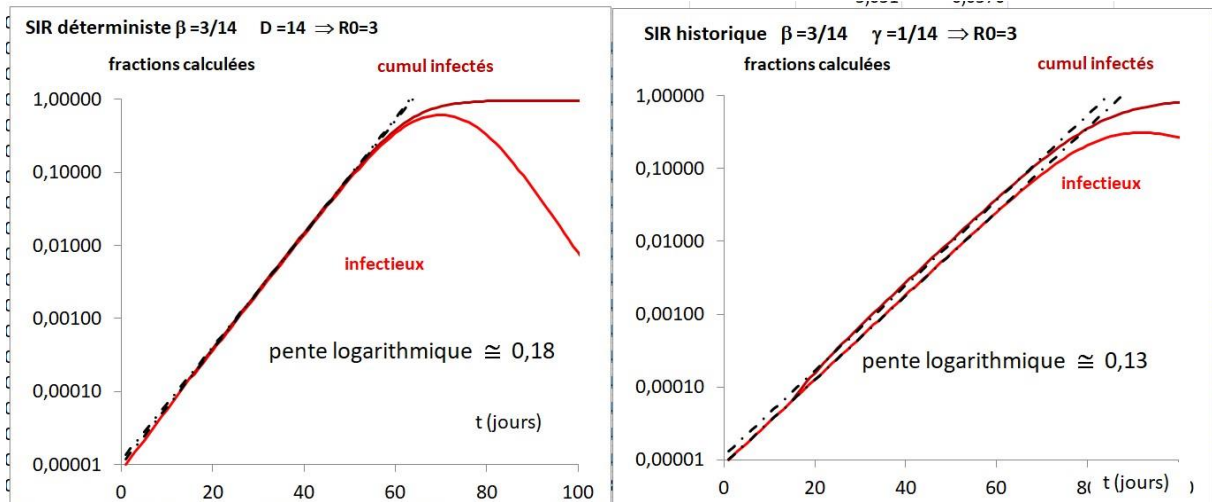
Une analogie naïve au modèle historique conduit à anticiper sur l'expression du coefficient de reproduction $R_0 = \beta / \gamma = \beta D$, qui sera justifiée par la suite. De plus, tout au long de cette étude, nous avons trouvé judicieux de prendre une fraction infectieuse initiale petite (typiquement $< 10^{-4}$) qui évite l'apparition d'une discontinuité gênante au moment du premier flux de sortie du compartiment infectieux.

Commençons par un essai comparatif dans le cas simple d'un taux de contamination β constant :



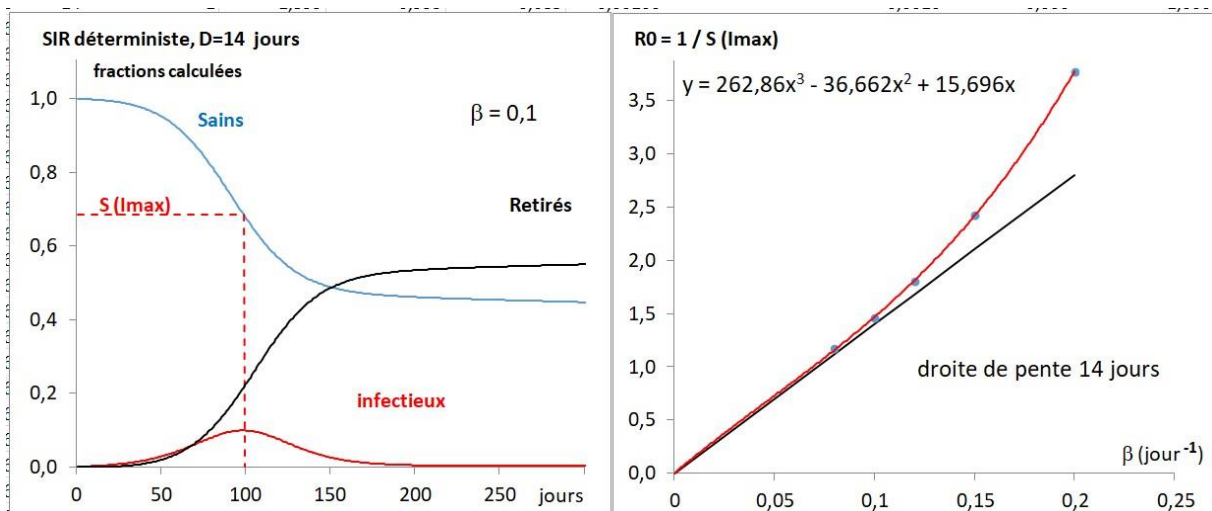
Sur ces figures nous avons porté la fraction infectieuse $I(t)$ et la fraction cumulée $I_c(t)$. Seule la seconde peut être reliée aux données épidémiques dont la plus visible est le cumul des cas déclarés (*dont le fameux taux d'incidence est la traduction journalière*). On constate, pour la même valeur de R_0 , que **la dynamique de l'épidémie est plus rapide avec le modèle semi-déterministe** : pic plus précoce, plus étroit, plus élevé.

Voyons maintenant comment se passe le démarrage exponentiel de l'épidémie. On se souvient que, dans le modèle historique, il suffit d'approximer la fraction saine $S(t)$ par sa valeur initiale 1. On a alors $dI(t)/dt = (\beta - \gamma) I(t)$, conduisant à $I(t) = I(t=0) \exp[(\beta - \gamma) t]$. Le tracé de $I(t)$, en échelle logarithmique, est une droite de pente $d[\ln I(t)]/dt = \beta - \gamma$. La fraction cumulé infectés $I_c(t) = \int_0^t \beta I(t) dt = [\beta/\beta - \gamma] \exp[(\beta - \gamma) t]$ est donc aussi une exponentielle de même pente logarithmique $\beta - \gamma$. Les données de la figure précédente sont montrées maintenant en échelle logarithmique :



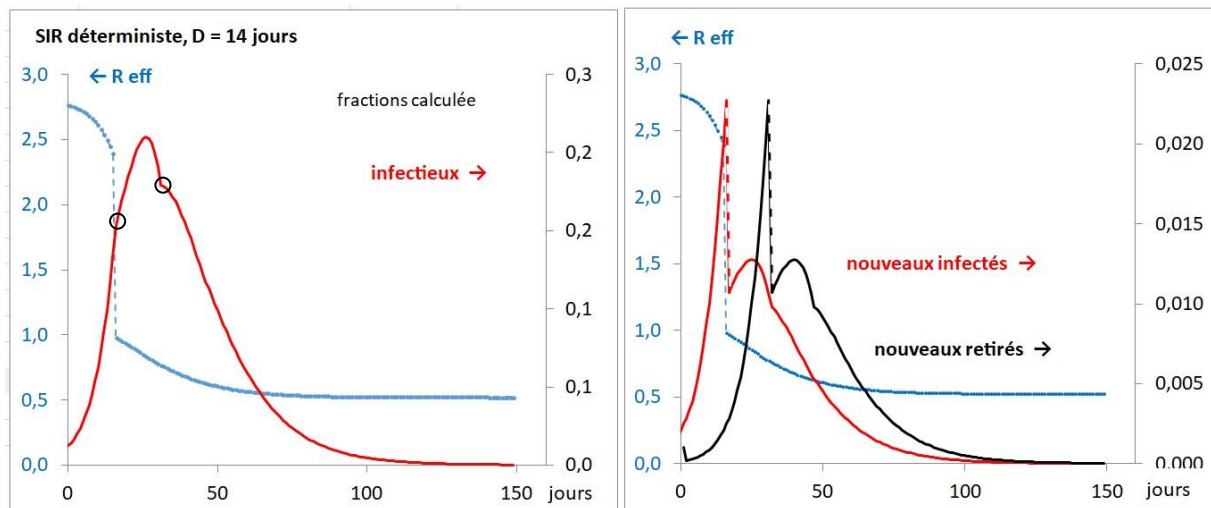
On retrouve bien ici, sur un large intervalle de temps, la croissance exponentielle des fractions $I(t)$ et $I_c(t)$, avec la même pente logarithmique 0,18, notablement supérieure à la valeur déduite de l'analogie au modèle SIR historique, $\beta - 1/D = 1/7 = 0,143$. C'est effectivement cette dernière valeur que l'on observe, au moins à peu près, avec ce modèle historique (figure de droite). On notera que la valeur plus élevée donnée par le modèle déterministe correspond bien à la dynamique plus active remarquée à la page précédente.

Nous explorons maintenant la notion fondamentale d'immunité de groupe. Rappelons que l'immunité de groupe est atteinte lorsque que le coefficient de reproduction de l'épidémie $R_{eff} = R_0 \times S(t)$ franchit la valeur critique 1 par suite de la réduction du nombre de personnes saines. La fraction $I(t)$ est alors maximum (figure de gauche). A ce moment $R_0 S(I_{max}) = 1$, ce qui détermine R_0 . Sur la figure de droite, nous avons répété cette opération avec différentes valeurs de β afin de préciser la dépendance $R_0(\beta)$:



La dépendance obtenue est proche de la dépendance linéaire suggérée par l'analogie indiquée précédemment qui conduit à une droite de pente 14 jours. C'est donc, à ce stade, une assez bonne approximation, que nous retiendrons par la suite. Il faut cependant noter que l'écart à cette loi devient considérable pour les grandes valeurs de β , comme celle que nous avons prise pour la première figure ($\beta = 3/14 = 0,21$).

Nous avons ensuite considéré une chute brutale du paramètre β simulant un effet de confinement, avec les valeurs $\beta = 0,2$ (avant) et $0,084$ (après) correspondant respectivement à $R_0 = 2,8$ et $R_{eff} = 1$. Pour la compréhension de ce qui va suivre, nous avons tracé sur la figure de droite les flux à l'entrée et à la sortie du compartiment Infectieux, respectivement dénotés « nouveaux infectés » et « nouveaux retirés ».

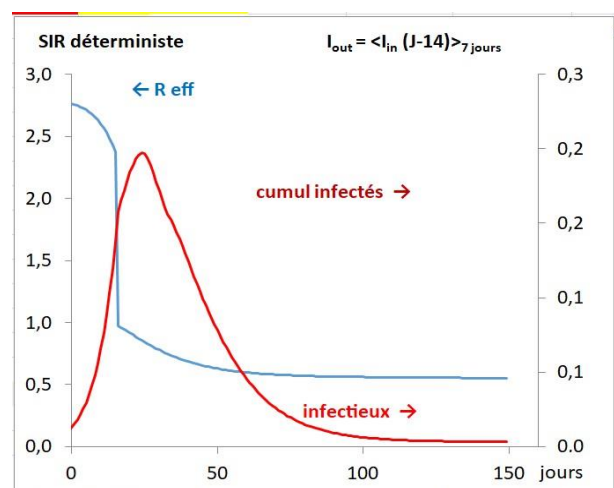


L'évolution (figure de gauche) de la fraction Infectieux est assez complexe, avant de présenter la décroissance monotone attendue. La courbe obtenue présente deux points anguleux bien visibles : dès le jour du confinement, et 14 jours après. Le premier correspond à la chute du flux d'entrée dans le compartiment Infectieux. Le second correspond à la chute du flux de sortie, et explique la variation contre-intuitive de $I(t)$ lors du second point anguleux.

Manifestement, ce modèle SIR-déterministe réagit avec susceptibilité aux variations brutales de son paramètre de commande β . Mais, s'agit-il vraiment d'un inconvénient ? La suite va nous le dire...

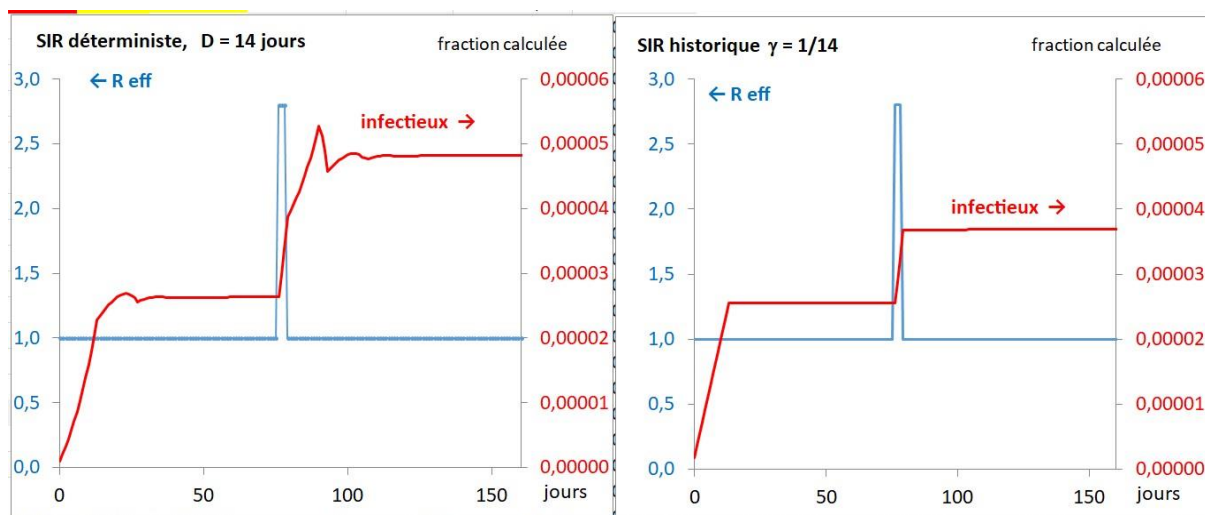
On peut déjà objecter que ce paramètre dynamique ne fait que suivre les mouvements de la société, et que son évolution sera nécessairement étalée au cours du temps.

On peut aussi améliorer le modèle en étalant le délai D . La simulation ci-contre est faite avec un délai étalé sur 7 jours autour de $J -14$. On voit que la seconde rupture de pente sur la courbe $I(t)$ est bien atténuée, tandis que l'évolution ultérieure est peu altérée (*elle se rapproche légèrement de celle que donnerait le modèle historique*).



Nous allons voir maintenant quelle est la réaction à une variation réversible et de courte durée du paramètre β . En d'autres termes, nous testons les signaux de sortie de notre « machine numérique » quand une impulsion est donnée au paramètre de commande. Pour cela, nous avons choisi un état initial évoluant lentement, préparé par une introduction constante d'infectieux pendant les 14 premiers jours. (*Cette*

introduction progressive permet d'étaler la discontinuité du quatorzième jour; précisons aussi que l'état préparé avec $R_{eff}=1$ est instable et conduit à terme la décroissance auto-accélérée de la fraction infectieuse).

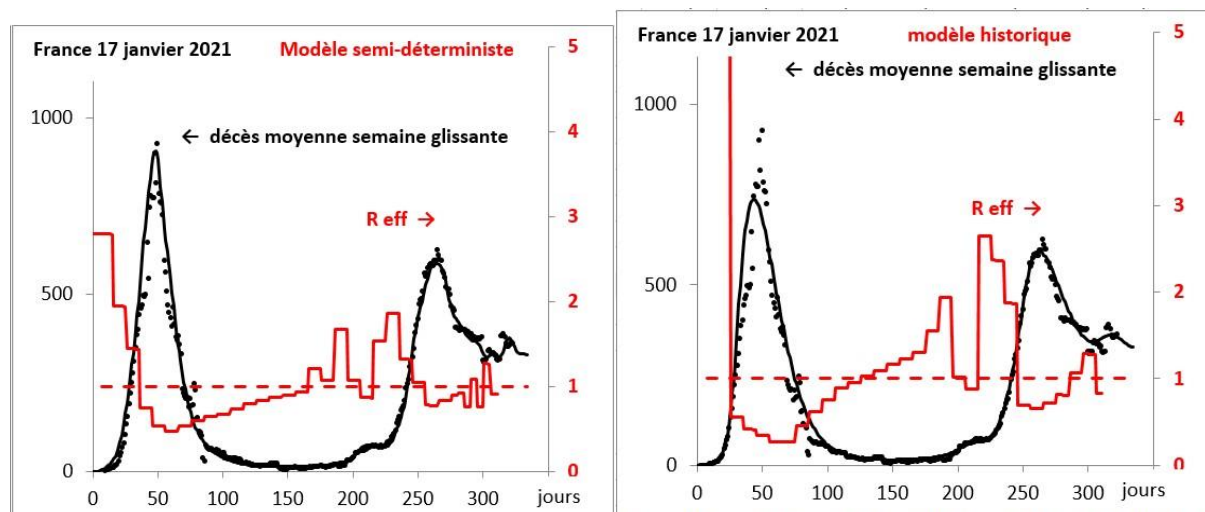


Comme attendu, la réaction donnée par le modèle déterministe est plus complexe et l'impact sur la fraction infectieuse est plus grand. Il en est de même pour la fraction cumul infectés (*non présentée ici*).

Cette prise en main nous semble concluante :

Le modèle semi-déterministe reproduit qualitativement tous les caractères essentiels de la dynamique de l'épidémie, qui ont justifié le succès du modèle historique S.I.R. purement probabiliste. Il réagit plus sensiblement aux variations du paramètre R_0 . Ceci va nous permettre d'en suivre plus finement l'évolution.

Pour justifier cette dernière affirmation, passons à l'analyse d'un cas réel. Il est alors nécessaire d'ajouter un compartiment décédés. Celui-ci est alimenté par le flux de sortie de $I(t)$ multiplié par le taux de létalité. Les résultats sont donnés ci-après :



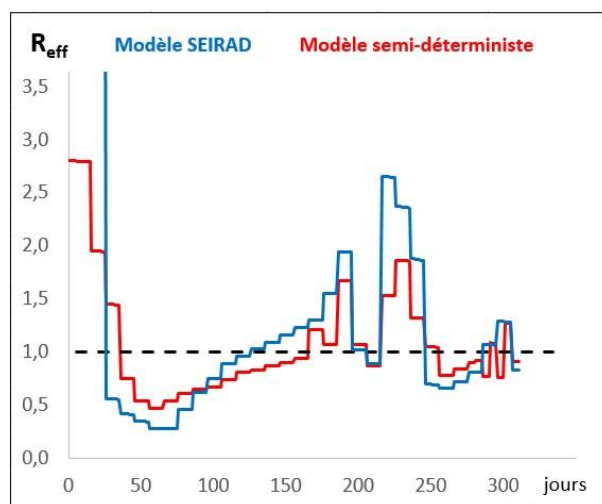
Nous avons d'abord constaté que l'**ajustement par tâtonnements** de la suite des valeurs successives de $R_{eff}(t)$ converge rapidement et reproduit des **détails** comparables à ceux des données. C'est un grand progrès par rapport au modèle historique qui a tendance à lisser les courbes calculées, et avec lequel l'ajustement par tâtonnements a toujours été laborieux et souvent ambigu. Nous avons profité de cet avantage du modèle semi-déterministe, voir figure de gauche, pour améliorer le rendu des premières semaines de l'épidémie, réduire la largeur des paliers dans la période récente, et suivre précisément l'évolution de données qui pouvaient sembler chaotiques au regard du modèle historique.

Cette amélioration considérable nous semble due au choix d'un temps d'évolution fixé. Il faut rappeler que dans le modèle probabiliste ce temps d'évolution s'étend de zéro à l'infini, avec une probabilité de sortie du compartiment infectés donnée par une exponentielle décroissante. Chaque changement dans la suite des valeurs données à R_{eff} a des effets à long terme. Au contraire, avec un temps fixé, il y a peu d'effets à long terme. Les inconnues qui forment la suite de valeurs $R_{\text{eff}}(t)$ sont peu corrélées, ce qui rend leur **détermination rapide et précise**.

Nous pouvons en particulier reproduire le dernier pic des décès avec un pic du coefficient de reproduction dans la période du 26 au 30 décembre. **L'effet des fêtes est passé !** Et la vague de contaminations que l'on pouvait redouter semble relativement faible. .

Le reste de l'analyse ne présente pas de différence notable avec le modèle historique, en particulier pour les fractions calculées et le taux de visibilité qui en découle.

Sur la figure ci-contre nous avons comparé en détail les courbes $R_{\text{eff}}(t)$ ajustées sur les mêmes données, avec les deux modèles. Ces courbes sont bien similaires, et indiquent à peu près les mêmes passages à travers la valeur critique 1, ce qui nous semble être l'information essentielle dans l'évolution de la pandémie. Cependant, l'évolution lente qui a précédé la seconde vague est rendue différemment par les deux modèles. Ce résultat demanderait à être confirmée par un affinement plus précis des données (procédure automatisée ?) dans une période où le nombre journalier de décès est faible et rend imprécise la détermination de R_{eff} .



En l'état, nous ne pouvons pas encore affirmer que le modèle semi-déterministe fournit des signaux d'alerte plus précoces que l'autre modèle. Cependant, à l'avenir, nous préférons utiliser le modèle semi-déterministe en raison de son caractère intellectuellement plus satisfaisant et de son exploitation plus commode et, par conséquent, plus précise.

Portez-vous bien, faites-vous vacciner dès que possible et restez vigilants. Si l'effet des fêtes est passé, celui des virus mutants est encore à venir, il faut l'aborder dans les moins mauvaises conditions possibles.

François VARRET, Physicien Professeur Emérite à l'Université de Versailles Saint-Quentin

Mathilde VARRET, Chargée de Recherche INSERM (Génétique, Biologie) Hôpital Bichat.

Avec nos remerciements à H. Lorain et F.-X. Martin pour leurs commentaires judicieux.